

Моделирование системы маркетинга. Часть 2.

Работа является продолжением части 1 под аналогичным названием. В этой части приведены результаты численного моделирования на основе предложенной в первой части структурной модели маркетинговой системы. Полученные результаты позволяют оценить различные подходы к взаимодействию между подсистемами и результирующую динамику поведения маркетинговой системы.

Рассмотрим ряд вариантов функции обратной связи между подсистемами.

Управляющее воздействие обратной связи пропорционально сумме воздействий каждой из подсистем

Рассматривая стабилизирующее влияние обратной связи, введем требование, что управляющее воздействие, формируемое звеньями обратной связи, пропорционально сумме накопленных воздействий каждой из подсистем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dY_1}{dt} &= F_1 + a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 - g_0(Y_1 + Y_2) \\ \frac{dY_2}{dt} &= F_2 + a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 - g_1(Y_1 + Y_2) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Частным случаем рассматриваемой системы является ситуация, когда взаимное стабилизирующее действие подсистем $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma$. В этом случае корни характеристического уравнения определяются выражением:

$$k_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 + x} \quad (2)$$

где $b = g - \frac{a_{11} + a_{22}}{2}$; $x = g[(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})] + a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}$

Условие стабильного состояния определяется требованием $Re k_{1,2} < 0$ и соответствует одновременному выполнению двух неравенств:

$$g > \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \quad (3)$$

$$a_{12} > a_{11}; a_{21} > a_{22} \quad (4)$$

В общем случае это соответствует следующему качественному требованию: стабилизирующее усилие, направляемое по цепи обратной связи маркетинговой системы и пропорциональное суммарному, накопленному подсистемами усилию по росту развития каждой из подсистем, способно стабилизировать поведение всей системы. Стабилизирующее усилие будет достаточным, если оно превысит средний показатель роста $(a_{11} + a_{22})/2$, а реакция каждой из подсистем a_{ik} будет больше собственных внутренних усилий рос-

та a_{ii} . Если эти требования не выполняются, то возникает неустойчивость в поведении маркетинговой системы.

Как в реальной ситуации будет происходить дестабилизация маркетинговой системы: это будет апериодический процесс, способствующий ее быстрому переходу в новое устойчивое состояние, или произойдет «раскачка» системы с нарастанием периодических внутренних колебаний? Здесь уместно обратиться к экспериментальным данным.

В монографии [5] на основе экспериментальных данных, полученных для различного вида катастроф, показано, что при аппроксимации основных процессов, предшествующих катастрофе, ее поведение может быть описано в виде функции от времени t :

$$I(t) = A + B \cdot (t_c - t)^a \cdot [1 + C \cdot \cos(w \log(t_c - t) - j)] \quad (5)$$

В работе [6] отмечено, что аналогичное поведение было присуще поведению индекса Доу-Джонса перед экономическим кризисом США в 1929г., а также содержанию ионов хлора в водных источниках перед землетрясением в Кобе в 1995г.

В работе [2] предпринята попытка на основании поведения системы, определяемого функцией $I(t)$ в (6) найти дифференциальное уравнение, имеющее такое же решение. Показано, что поведение представляет решение системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными. Это также говорит в пользу используемого подхода при моделировании маркетинговой системы.

Наличие временной задержки в уравнениях вида $(t-t_c)$ может быть отнесено к задержке в реакции технической подсистемы по отношению к социальной. Такое допущение вполне естественно, поскольку в процессе эволюции человеческой цивилизации технические новшества всегда отстают от идей, их породивших.

В общем случае стабилизирующее воздействие g должно быть различно для социальной подсистемы (g_1) и технической (g_2): $g_1 \neq g_2$. С учетом задержки во времени реакции технической подсистемы представим систему уравнений в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dY_1}{dt} &= a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 - g_1(Y_1 + Y_2) \\ \frac{dY_2}{dt} &= a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 - g_2(t - t_c)(Y_1 + Y_2) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Следует отметить, что второе уравнение системы (6) при наличии задержки имеет линейно увеличивающееся стабилизирующее усилие по цепи обратной связи. Это обусловлено необходимостью стабилизации поведения технической подсистемы, поскольку возникновение в ней колебательного режима с нарастающей амплитудой неизбежно приведет к разрушению всей маркетинговой системы.

Для решения системы (6) используем математический пакет Mathcad 13, а именно функцию rkfixed(y_0, t_1, t_2, n, F). В соответствии с описанием этого

математического пакета, приведенным в работе [3], эта функция выдает таблицу результатов решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта четвертого порядка с фиксированным шагом интегрирования. Аргументы этой функции:

- y_0 – вектор начальных значений искомых функций Y_1 и Y_2 ;
- t_1 и t_2 – начальное и конечное значение независимой переменной;
- n – фиксированное количество шагов интегрирования;
- F – правые части системы уравнений (7), записанные в виде вектора-столбца в символьном виде.

Для представления (6) в символьном виде сгруппируем коэффициенты при Y_1 и Y_2 и вектор-столбец F представим в виде:

$$F = \begin{pmatrix} (a_{11} - g_1)Y_1 & (a_{12} - g_1)Y_2 \\ (a_{21} - g_2(t - t_c))Y_1 & (a_{22} - g_2(t - t_c))Y_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Ниже приведены листинги расчета поведения маркетинговой системы при изменении значений параметров модели.

$$\alpha_{11} := 0.3 \quad \alpha_{12} := 0.1 \quad \alpha_{22} := 0.1 \quad \alpha_{21} := 0.1 \quad \gamma_1 := 0.4 \quad \gamma_2 := 0.2$$

ORIGIN := 1

$$F(t, y) := \begin{bmatrix} \alpha_{11} \cdot y_1 + \alpha_{12} \cdot y_2 - \gamma_1 \cdot (y_1 + y_2) \\ \alpha_{21} \cdot y_1 + \alpha_{22} \cdot y_2 - \gamma_2 \cdot (t - t_c) \cdot (y_1 + y_2) \end{bmatrix}$$

$$t_1 := 0 \quad t_2 := 100 \quad n := 500 \quad y0 := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad j := 0..600$$

$$Z := rkfixed(y0, t1, t2, n, F)$$

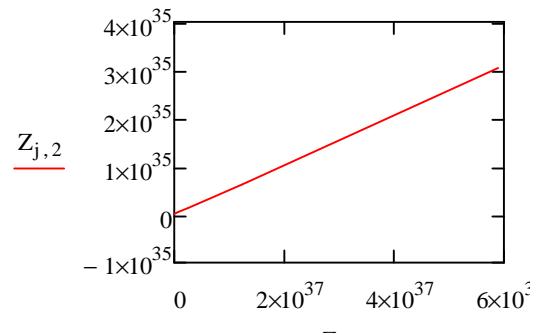


Рис.1 Фазовый портрет поведения модели при $\gamma_1 = 0,4$; $\gamma_2 = 0,2$

Увеличение коэффициента γ_2 до значения больше 0.2 резко увеличивает нарастание Y_1 и Y_2 , т.е. стабилизация не достигается

Изменим параметры системы: $a_{11}:=0.3$; $a_{12}:= 0.1$; $a_{22}:= 0.1$; $a_{21}:= 0.1$; $\gamma_1 := 0.32$; $\gamma_2 := 0.2$.

Здесь мы уменьшили параметр стабилизации $\gamma_1 = 0.32$ (было 0,4). Результат представлен на рис.2

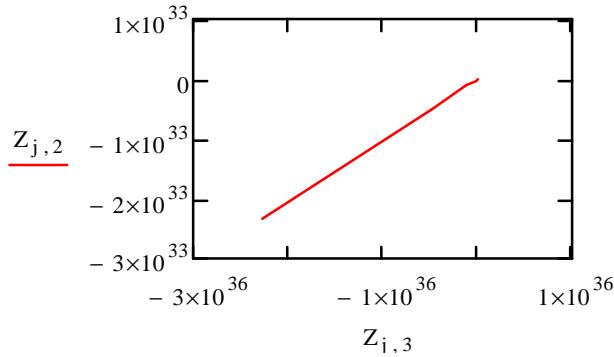


Рис.2 Фазовый портрет поведения модели при $\gamma_1 = 0.32$; $\gamma_2 = 0.2$

Как видно из рис.2, при таком уменьшении параметра стабилизации система прекращает развиваться по нарастающей в фазовой плоскости и все параметры резко с течением временем уменьшаются.

Уменьшим параметр стабилизации g_2 : $a_{11}:=0.3$; $a_{12}:= 0.1$; $a_{22}:= 0.1$; $a_{21}:= 0.1$; $\gamma_1 := 0.4$; $\gamma_2 := 0.05$.

Т.е. по сравнению со случаем, представленном на рис.1 уменьшили параметр стабилизации технической подсистемы в 4 раза.

В результате такого уменьшения параметра стабилизации система из начального состояния (0.1;0.1) перешла с течением времени в нулевое (0;0) т.е прекратила вообще развитие.

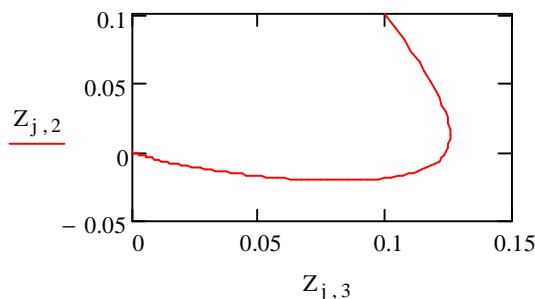


Рис.3 Фазовый портрет системы при уменьшении параметра стабилизации технической подсистемы с $g_2 = 0,2$ до $0,05$.

Зададим следующий набор параметров системы:
 $a_{11}= 3$; $a_{12} = 1$; $a_{21} = 1$; $a_{22} = 1$; $g_1 = 4$; $g_2 = 0,1$. Этот набор параметров системы соответствует ситуации с сильным темпом развития каждой из подсистем, со-

хранившемся начальном уровне стабилизации по цепи обратной связи социальной подсистемы и уменьшенном уровне стабилизации технической подсистемы

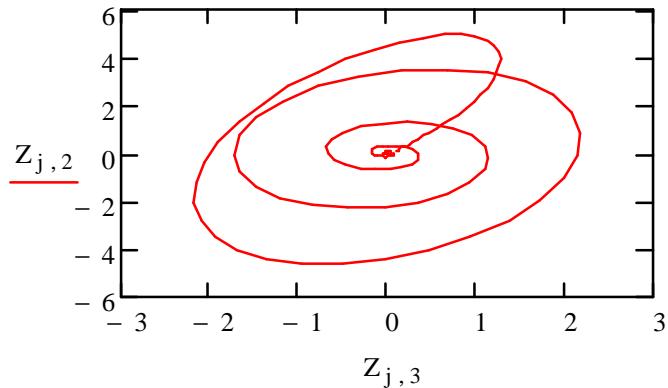


Рис.4 Фазовый портрет системы при $\gamma_1 = 0,4$; $\gamma_2 = 0,1$.

Траектория движения системы в фазовой плоскости показывает, что с течением времени в результате действия обратной связи система стабилизирует свое поведение и возвращается в исходное состояние.

По сравнению с предыдущим вариантом уменьшим скорость развития социальной подсистемы: коэффициент α_{11} вместо 3 возьмем равным 1. Результатирующее поведение маркетинговой системы представлено на рис.5.

В этом случае по сравнению с вариантом, представленном на рис.4 произведено уменьшение скорости развития социальной подсистемы (α_{11} уменьшен с 3 до 1). При этом амплитуда движения в фазовой плоскости самой системы увеличилась, но стабилизация сохранилась.

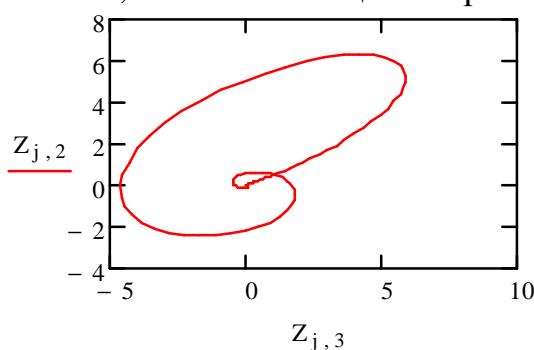


Рис.5 Фазовый портрет системы при $\gamma_1 = 0,4$; $\gamma_2 = 0,1$ $t_c = 1$.

Таким образом, при сохранении регулирования по суммарной величине уровня развития ($Y_1 + Y_2$) стабилизация достигается весьма эффективно несмотря на уменьшение стабилизации технической подсистемы.

Увеличение времени задержки в воздействии на техническую подсистему с 1 до 10 т.е. ($t - 1$) заменили во втором уравнении системы (7) на ($t - 10$) приводит к увеличению амплитуды траектории движения в фазовом пространстве прежде чем система стабилизируется

Значения параметров системы при этом:
 $a_{11} = 1; a_{12} = 1; a_{21} = 1; a_{22} = 1; g_1 = 0,4; g_2 = 0,1; t_c = 10$

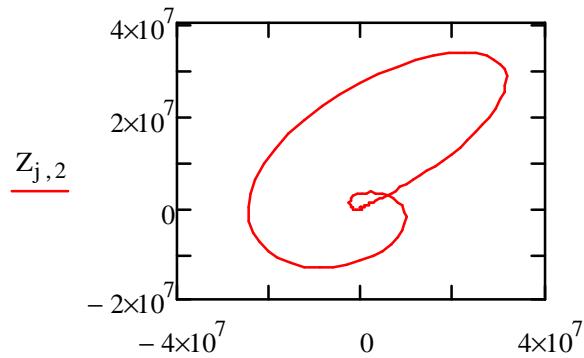


Рис.6 Фазовый портрет системы при $\gamma_1 = 0,4; \gamma_2 = 0,1$ и увеличенной задержкой реакции технической подсистемы $t_c = 10$ (на рис.5 величина $t_c = 1$)

Таким образом, если при малом времени задержки в регуляторе обратной связи амплитуда изменений не превышала 10 по абсолютной величине и времени задержки 1, то при увеличении времени задержки до 10 амплитуда увеличилась до 10^7 , т.е на 7 порядков, прежде чем система стабилизировалась.

Ниже график на рис.7 соответствует изменению времени задержки до $t_c = 2$ и следующих значениях остальных параметров системы:

$$a_{11} = 1; a_{12} = 1; a_{21} = 1; a_{22} = 1; g_1 = 0,4; g_2 = 0,1; t_c = 2$$

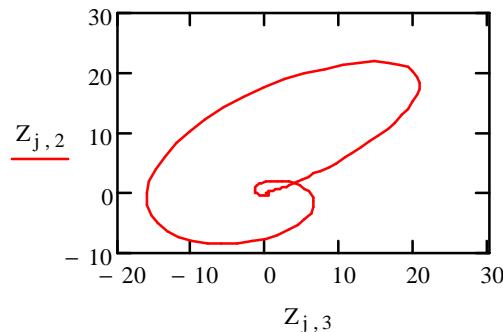


Рис.7 Фазовый портрет системы при $\gamma_1 = 0,4; \gamma_2 = 0,1$ и увеличенной задержкой реакции технической подсистемы $t_c = 2$ (на рис.6 величина $t_c = 10$)

Следующий фазовый портрет поведения маркетинговой системы (рис.8) соответствует времени задержки $t_c = 3$ при тех же значениях остальных параметров:

$$a_{11} = 1; a_{12} = 1; a_{21} = 1; a_{22} = 1; g_1 = 0,4; g_2 = 0,1; t_c = 3$$

Сопоставление фазовых траекторий поведения фазовой системы показывает, что увеличение времени задержки реакции в цепи обратной связи вызывает увеличение размаха колебаний технической подсистемы, прежде чем она вернется в стабильное состояние.

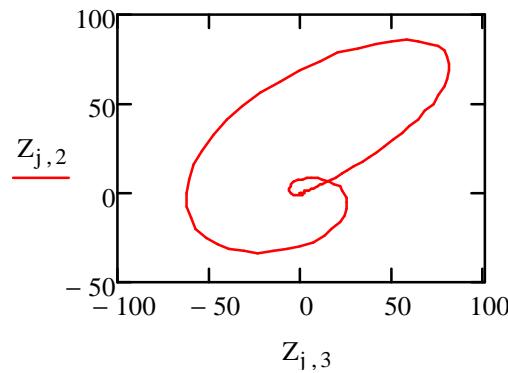


Рис.8. Фазовый портрет системы при $\gamma_1 = 0,4$; $\gamma_2 = 0,1$ и времени задержки реакции технической подсистемы $t_c = 3$ (на рис.7 величина $t_c = 2$)

Система может быть переведена в нестабильное состояние – расходящийся фокус, что приведено на рис.9 ниже. Для этого были уменьшены значения коэффициентов обратной связи $\gamma_1 = 0,01$ и $\gamma_2 = 0,01$. Система совершает периодические колебания с нарастающей амплитудой, свидетельствующие, что одна из подсистем периодически подталкивает другую и имеет сдвиг фаз между ними. В этом случае использован следующий набор параметров:

$$a_{11} = 1; a_{12} = 1; a_{21} = 1; a_{22} = 1; g_1 = 0,01; g_2 = 0,01; t_c = 1$$

Этот случай соответствует равным коэффициентам ускорения и взаимного влияния подсистем, а главное, уменьшенным коэффициентам стабилизации подсистем по цепи обратной связи.

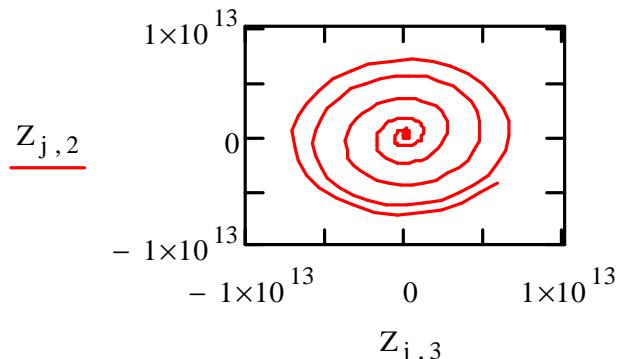


Рис.9. Фазовый портрет системы при уменьшении стабилизирующего влияния : $\gamma_1 = 0,01$; $\gamma_2 = 0,01$ и времени задержки реакции технической подсистемы $t_c=1$.

Если отказаться от задержки в цепи обратной связи, т.е. в случае, когда техническая подсистема мгновенно воспринимает изменения, происходящие в социальной подсистеме, то исчезают колебательные процессы в маркетинговой системе и начинается одновременное нарастание по обоим параметрам $Y_1; Y_2$ в фазовом пространстве. Ниже приведен случай, когда вместо (t -1) втором уравнении системы (7) принято постоянное значение, равное 1. Остальные значения параметров аналогичны приведенным на рис.9.

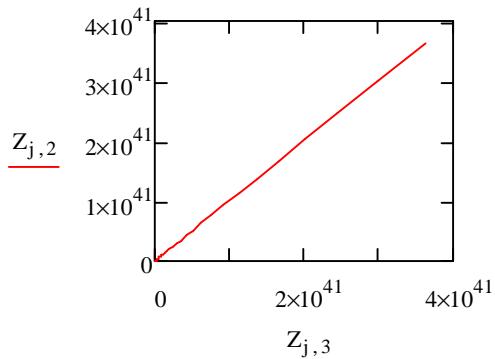


Рис.10. Фазовый портрет системы при отсутствии задержки в реакции технической подсистемы и отсутствии нарастающего во времени стабилизирующего воздействия по цепи обратной связи.

Неустойчивое поведение маркетинговой системы, сопровождающееся колебательными процессами в каждой из подсистем – крайне нежелательный вариант ее развития. В системе нарушается поступательное развитие. В фазовом пространстве ее поведение – раскручивающаяся спираль – неустойчивый фокус.

Ниже приведен один из вариантов такой ситуации. Использованы следующие параметры системы:

$$a_{11} = 0,3; a_{12} = 0,3; a_{21} = 0,3; a_{22} = 0,3; g_1 = 0,01; g_2 = 0,001.$$

Листинг решения приведен ниже:

ORIGIN:= 1

$$F(t, y) := \begin{bmatrix} \alpha_{11} \cdot y_1 + \alpha_{12} \cdot y_2 - \gamma_1 \cdot (y_1 + y_2) \\ \alpha_{21} \cdot y_1 + \alpha_{22} \cdot y_2 - \gamma_2 \cdot (t - 1) \cdot (y_1 + y_2) \end{bmatrix}$$

$$j := 0 .. 1000 \quad t_1 := 0 \quad t_2 := 300 \quad n := 1000$$

$$y0 := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad Z := rkfixed(y0, t_1, t_2, n, F)$$

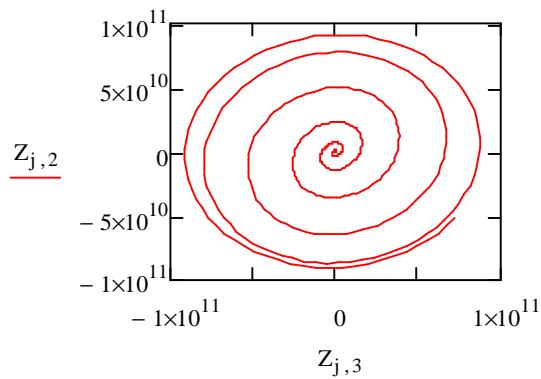


Рис.11 Фазовый портрет поведения маркетинговой системы, соответствующий неустойчивому развитию – неустойчивый фокус.

В этой ситуации заложены равные и большие параметры ускорения развития каждой из подсистем, а также их взаимного влияния. Стабилизирующие значения коэффициентов обратной связи относительно малы по сравнению с рассмотренными ранее и, кроме того, коэффициент стабилизации технической подсистемы в 10 раз меньше, чем у социальной подсистемы.

Как отмечено выше, такая динамика поведения подсистем ведет к неограниченному нарастанию амплитуды и последующему разрушению всей маркетинговой системы.

Другой вариант – отсутствие временной задержки в реакции технической подсистемы.

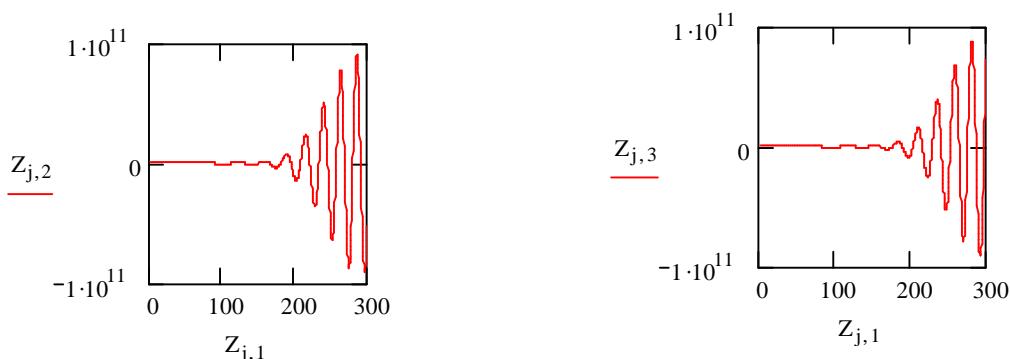


Рис.12 Амплитуда поведения решения для социальной и технической подсистем во времени.

В фазовой плоскости система не ограничена, однако реально скорость роста будет ограничена и обе подсистемы приходят в некоторое стабильное состояние. Ниже приведены условия моделирования такой ситуации и листинг решения:

$$\alpha_{11} := 1 \quad \alpha_{12} := 0.1 \quad \alpha_{22} := 1 \quad \alpha_{21} := 0.1 \quad \gamma_1 := 0.1 \quad \gamma_2 := 0.01$$

ORIGIN:=1

$$F(t, y) := \begin{bmatrix} \alpha_{11} \cdot y_1 + \alpha_{12} \cdot y_2 - \gamma_1 \cdot (y_1 + y_2) \\ \alpha_{21} \cdot y_1 + \alpha_{22} \cdot y_2 - \gamma_2 \cdot (2 - 1) \cdot (y_1 + y_2) \end{bmatrix}$$

$$t_1 := 0 \quad t_2 := 1000 \quad n := 1000 \quad y0 := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad j := 0..1000 \quad Z := rkfixed(y0, t1, t2, n, F)$$

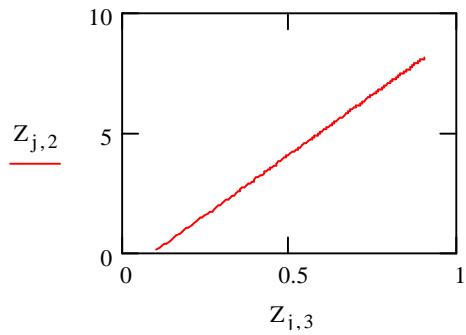


Рис.13 Фазовый портрет развития маркетинговой системы соответствующий случаю насыщения в поведении каждой из подсистем.

В приведенной выше ситуации (рис.14) обе подсистемы с течением времени стремятся стабилизировать амплитуду своего развития. Вместе с этим предельное значение ее для социальной подсистемы на порядок больше.

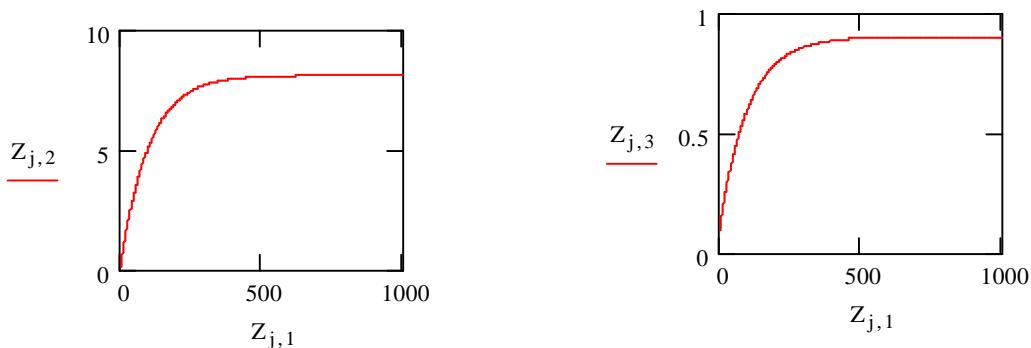


Рис. 14 Динамика развития во времени социальной и технической подсистем.

Здесь следует обратить внимание на то, что нестабильность системы в фазовом пространстве есть эволюция маркетинговой системы.

В реальной ситуации, достигая насыщения, т.е. амплитуда развития каждой из подсистем приближается к предельному значению ее роста, соответствующему $t \rightarrow \infty$, система притягивается к новому аттрактору, запускающему новый цикл ее развития.

Управляющее воздействие обратной связи представляет линейно-квадратичную функцию.

Рассмотрим еще один вариант управляющего воздействия на подсистемы в маркетинговой системе. Для аналитического описания функциональной зависимости управляющего воздействия воспользуемся формальной моделью выбора Лефевра [4] субъектом одной из полярных альтернатив. Следует отметить, что речь идет о выборе полярных, т.е. противоположных по своей сущности альтернатив.

Лефевром была определена функция, связывающая желание субъекта х выбрать позитивный полюс с реальной готовностью X_1 сделать это:

$$X_1 = x_1 + (1-x_1)(1-x_2)M(x,y) \quad (8)$$

где : x_1 - характеризует давление внешнего мира в сторону позитивного полюса в настоящем, в момент выбора; x_2 – характеризует давление в сторону позитивного полюса, ожидаемое субъектом на основе его предшествующего опыта; $M(x,y)$ – прогностическая функция, соответствующая оценке субъектом исходной ситуации.

Входящая в $M(x,y)$ переменная y – описывает партнера субъекта и отражает его готовность выбрать также позитивный полюс. В квадратичной модели прогностическая функция вводилась как зависящая от одной переменной x :

$$M(x,y) = bx^2 + ax + c \quad (9)$$

т.е. без готовности партнера y выбрать тот же полюс. В работе [1] сделано допущение о целесообразности учета действия партнера y и представления прогностической функции $M(x,y)$ квадратичной по переменной x и линейной по переменной y :

$$M(x,y) = ax^2 + bx + c + dxy + ey \quad (10)$$

В этой модели субъект x оценивает свое действие квадратично, а партнера – линейно. Это логично, поскольку свое поведение субъект оценивает значимее, чем партнера.

Рассмотрим эти предпосылки с точки зрения регулирования маркетинговой системы. Считаем, что каждая из подсистем оценивает свою значимость по отношению противоположной выше. В маркетинговой системе считаем, что стабилизирующее значение в каждой подсистеме должно соответствовать сумме квадрата накопленного воздействия самой подсистемы плюс воздействие противоположной подсистемы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dY_1}{dt} &= a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 - g_1(Y_1^2 + Y_2) \\ \frac{dY_2}{dt} &= a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 - g_2(t - t_c)(Y_1 + Y_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Такая маркетинговая система должна демонстрировать более плавный эволюционный рост и быть более устойчивой к различным воздействиям.

Рассмотренный далее случай поведения соответствует параметрам маркетинговой системы аналогичным представленным на рис.1:

$$a_{11} = 0,3; a_{12} = 0,1; a_{21} = 0,1; a_{22} = 0,1; g_1 = 0,4; g_2 = 0,2.$$

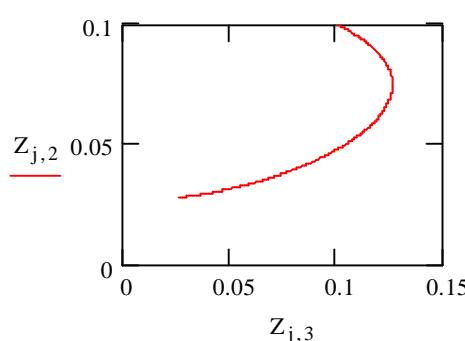


Рис.15 Фазовый портрет маркетинговой системы для линейно- квадратичной обратной связи.

Следует отметить, что если на рис.1 система в фазовом пространстве демонстрирует неограниченный рост, то сильная отрицательная обратная связь приводит к уменьшению параметров системы (рис.15). Собственно динамика поведения каждой из подсистем (рис.16) подтверждает это.

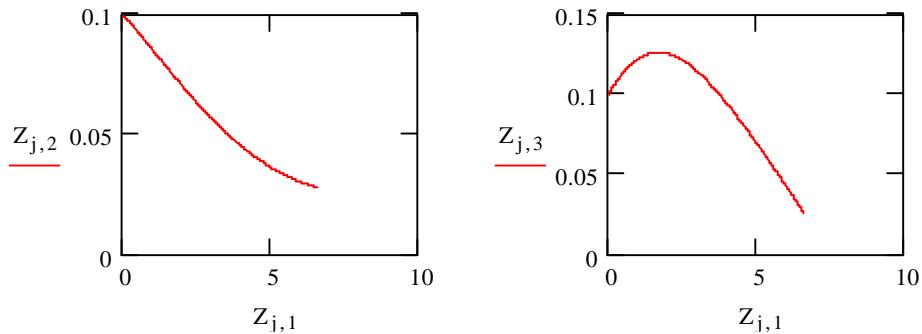


Рис.16 Динамика развития во времени социальной и технической подсистем для случая на рис.15.

При этом даже резкое уменьшение параметров стабилизации $g_1; g_2$ не меняет принципиальной картины. В качестве примера ниже приведен случай, аналогичным параметрам маркетинговой системы, приведенным на рис. 11.

$$a_{11} = 0,3; a_{12} = 0,3; a_{21} = 0,3; a_{22} = 0,3; g_1 = 0,01; g_2 = 0,001. \quad (12)$$

Такое сочетание параметров привело к тому, что для этого набора параметров при линейно-аддитивном воздействии по цепи обратной связи в фазовом пространстве поведения маркетинговой системы соответствовало неустойчивому фокусу (рис.11). В нашем же случае система демонстрирует тенденцию к ограничению параметров развития (рис.17;18).

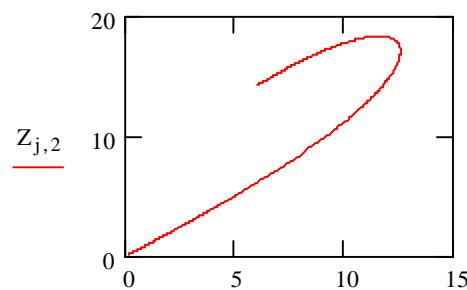


Рис.17 Фазовый портрет маркетинговой системы при значениях параметров, задаваемых соотношением (12).

Если при таком же наборе значений параметров маркетинговая система демонстрировала неустойчивое развитие с колебательными процессами в каждой из подсистем, то здесь картина радикально меняется.

Амплитуда развития каждой из подсистем первоначально демонстрирует первоначально рост при последующем быстром его замедлении и последующем спаде.

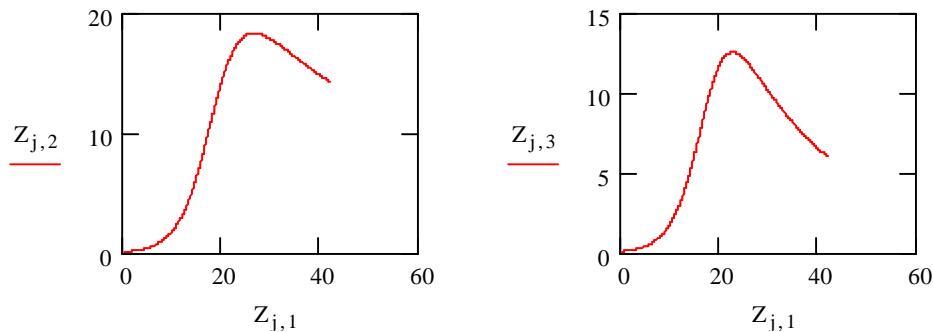


Рис.18 Динамика поведения социальной и технической подсистем для случая на рис.17.

Такое поведение маркетинговой системы свидетельствует о том, что если управление в системе, несмотря на задержку реакции в технической подсистеме, оказывается более сильным, чем линейно-аддитивное, то система быстро ограничивает амплитуду своего развития. «Жесткое» управление тормозит динамику развития системы.

Заключение

1. Проведенный численный анализ показывает возможность многоаспектности в поведении модели маркетинговой системы.

2. Ситуация, когда управляющее воздействие обратной связи пропорционально сумме воздействия каждой из подсистем показывает, что маркетинговая система весьма критична с позиций устойчивости. При этом задержка в реакции технической подсистемы на изменения в социальной подсистеме может привести в общей нестабильности маркетинговой системы.

3. Применение на основе модели Лефевра аппроксимации управляющего воздействия в виде линейно - квадратичной функции способствует в целом повышению стабильности в поведении маркетинговой системы.

Этот случай демонстрирует влияние выбора субъекта исходя из определенной полезности и является лучшим приближением к реальному развитию маркетинговой системы.

Список использованной литературы:

1. Анисимова С.А. Линейно-квадратичная модель рефлексивного выбора/ Рефлексивные процессы и управление, 2003,т.3, №2,с.53-56.
2. Басин М.А. О функции, описывающей поведение системы перед катастрофическими событиями, и дифференциальных уравнениях, которым она удовлетворяет. Письма в ЖТФ,2006,т.32,вып.8,с.30-33.

3. Кирьянов Д.В. Mathcad 13.-СПб.:БХВ Петербург,2006.-.608с.
4. Лефевр В.А., Адамс-Веббер Дж. Функции быстрой рефлексии в биполярном выборе/Рефлексивные процессы и управление, 2001, т.№1, С.34-46
5. Малинский Г.Г. Управление риском: Риск.Устойчивое развитие. Синергетика. М.:Наука, 2000г., С.9.
6. Johansen A., Sovnette D. et al./J.Phys.France,1996,v.6, P.1391-1402