Чернявский А.Д.

Распространение информации с учетом субъективной полезности

В предположении ряда закономерностей в восприятии информации как субъективно полезной: скорость изменения источника полезного сигнала обратно пропорциональна объему полученной информации, пропорциональна объему полученной информации и случай, когда она постоянна, т.е. не зависит от объема полученной информации, рассмотрено распространение информации в ограниченной аудитории. Показано, что наибольшая скорость роста численности аудитории, оценивающей информацию как субъективно полезную, возможна в случае зависимости скорости изменения источника субъективно полезной информации пропорционально объему полученной информации.

Рассмотрим распространение информации в некоторой замкнутой аудитории численностью N_0 человек. Типичным для модели распространения информации, например, рекламной, можно считать использование детерминистского подхода, когда рассматриваются только усредненные характеристики [1,с.150-154].

Считаем, что имеется некоторый единичный источник, распространяющий равномерно информацию внутри аудитории. При этом предполагаем, что плотность вероятности объективно полезной информации задается равномерным распределением $g(N) = 1/N_0$. Таким образом, величина вероятности получения информации P_1 группой из N «приемников»:

$$\mathbf{P_1(N) = \int_0^N g(x)dx = \frac{N}{N_0}} \qquad (1)$$

Распространяемая информация считается объективно полезной.

Определим вероятностные характеристики субъективной оценки «приемником» полезности принятой информации.

Для анализа этой ситуации допустим, что имеется источник информации с субъективной полезностью X, изменение которого описывается дифференциальным уравнением:

$$\mathbf{\frac{dx}{dt} = \Phi(x)} \qquad (2)$$

и его решение $t = G(x)$.

Существует также известная плотность вероятности субъективной полезности информации $f(t)$. Тогда плотность вероятности в переменной субъективной полезности информации:

$$\mathbf{f(x) = f[t(x)] \times t'_x = f[(G(x)] \times G'_x(x)} \qquad (3)$$

С учетом эффекта старения информации [2] разумно предположить, что время существования и работы источника полезной информации являет-

ся случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение с параметром μ.

В этом случае плотность распределения времени жизни источника будет определяться формулой:

$$\mathbf{f(t)} = \mu \times \mathbf{exp(-\mu t)} \tag{4}$$

С учетом этого плотность распределения случайной величины x:

$$\mathbf{f(x)} = \mu\,\mathbf{exp}\left[-\mu \mathbf{G(x)}\right] \times \mathbf{G'_x(x)}. \tag{5}$$

Кроме того, считаем, что источник равномерно распределен среди аудитории, т.е. $x = N/N_0$.

В итоге получаем:

$$\mathbf{f(N)} = \mathbf{f(x(N))} \times \mathbf{x'_N} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N_0}}\mathbf{f(x(N))} \tag{6}$$

Соответственно, величина вероятности оценки субъективной полезности

$$\mathbf{P_2(N)} = \int_{0}^{N} \mathbf{f(z)dz} \tag{7}$$

где f(z) находим как f(N) из (6).

Таким образом, с учетом сделанных допущений можем определить линейную модель роста численности аудитории, воспринимающей распространяемую информацию как полезную:

$$\frac{\mathbf{dN}}{\mathbf{dt}} = \gamma \mathbf{P_1 P_2 N}\ , \tag{8}$$

где γ – коэффициент передачи информации из внешней среды «приемника» в его «внутреннюю».

Для дальнейших оценок рассмотрим ряд типичных функциональных зависимостей полезности информации $\Phi(x)$:

- убывающая скорость полезности информации пропорционально объему полученной информации – аналог убывающей предельной полезности любого экономического блага:

$$\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} = \frac{\lambda}{\mathbf{x}}; \tag{9}$$

- скорость роста полезности информации пропорциональна величине полезной информации:

$$\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} = \lambda \mathbf{x}^{a}; \ a < \mathbf{1}; \tag{10}$$

- постоянная скорость роста полезности информации во времени:

$$\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} = \lambda\ ; \tag{11}$$

- постоянная во времени полезность информации:

$$\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{0} \tag{12}$$

Последовательно рассмотрим влияние указанных зависимостей (9)-(12) на характеристики роста численности аудитории, воспринимающей распространяемую информацию как полезную.

1. *Случай убывающей предельной полезности информации.* Из (9) находим в предположении, что в первоначальный момент времени приемник не располагает полезной информацией x(t=0) = 0:

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}^2}{2\lambda}; \mathbf{t}'_{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\lambda} \tag{13}$$

Соответственно, с учетом (5):

$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mu}{\lambda}\mathbf{exp}\left[-\frac{\mu\mathbf{x}^2}{2\lambda}\right] \times \mathbf{x} \tag{14}$$

Отсюда находим:

$$\mathbf{f(N)} = \frac{\mu}{\lambda}\mathbf{exp}\left[-\frac{\mu\mathbf{N}^2}{2\lambda\mathbf{N}_0^2}\right] \times \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{N}_0^2} \tag{15}$$

Отметим, что здесь f(N) является частным случаем распределения Вейбулла

$$\mathbf{f(x)} = \lambda_0 a\mathbf{x}^{a-1}\mathbf{exp}(-\lambda_0\mathbf{x}^a) \tag{16}$$

для значения показателя α = 2. Оно является промежуточным между нормальным и экспоненциальным. При α =2 плотность распределения вероятности:

$$\mathbf{f(x)} = 2\lambda_0\mathbf{x}\,\mathbf{exp}(-\lambda_0\mathbf{x}^2) \tag{17}$$

Обозначим в (14) $b = \mu/2\lambda$ и тогда получим распределение Вейбулла:

$$\mathbf{f(x)} = 2b\mathbf{x}\,\mathbf{exp}(-b\mathbf{x}^2) \tag{18}$$

Считаем, что (18) определяет плотность распределения субъективной вероятности «приемников» к восприятию полезной информации.

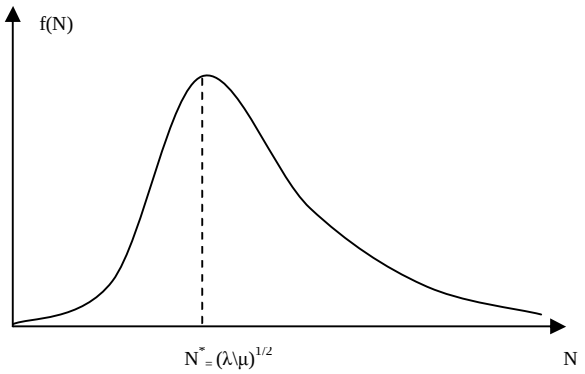

Рис.1. Плотность распределения вероятности f(N) субъективной полезности информации для случая убывающей полезности (15).

На рис.1 приведена зависимость плотности вероятности восприятия субъективной полезности вероятности «приемником».

Вероятность восприятия «приемником» субъективной полезности информации находим интегрируя (14):

$$\mathbf{P_2(N)} = \int_0^N \mathbf{f(x)dx} = \left(\mathbf{1 - exp(-bN^2)}\right) \qquad (19)$$

В нашем случае $P_2(N)$ представляет внутреннюю, т.е. субъективно воспринимаемую полезность информации «приемником».

Соответственно, дифференциальное уравнение для роста числа приемников ΔN в линейном приближении:

$$\Delta \mathbf{N} = \mathbf{P_1} \times \gamma \times \mathbf{P_2} \times \mathbf{N} \times \Delta \mathbf{t}, \qquad (20)$$

где P_1 – внешняя (объективная) вероятность получения «приемником» информации; γ – к-т передачи из внешней среды «приемника» во внутреннюю информации; P_2 - вероятность внутреннего восприятия «приемником» полезной информации.

Далее предположим равномерно распределенную среди приемников во внешнем пространстве полезную информацию и отсюда находим:

$$\mathbf{P_1} = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{N_0}}, \qquad (21)$$

где N – количество «приемников» получивших информацию; N_0 – общее количество «приемников».

Подставляя (19),(21) в (20) и производя замену $n = N/N_0$; $\tau = \gamma t$; $\xi = \mu/2\lambda$ получим:

$$\frac{\mathbf{dn}}{\mathbf{d}t} = \left[\mathbf{1 - exp(-x\mathbf{n}^2)}\right] \times \mathbf{n}^2 \qquad (22)$$

Рассмотрим асимптотическое решение уравнения (22) и проанализируем его. Первоначально считаем $x\mathbf{n}^2 >> \mathbf{1}$. Учитывая $n \leq 1$, рассмотрим требование $\xi >> 1$, хотя это и более жесткое условие для выполнения всего неравенства. Принимая во внимание обозначение ξ, запишем:

$$x = \frac{\mu}{\mathbf{2}\lambda} >> \mathbf{1} \qquad (23)$$

Для выполнения этого неравенства требуется:

- малая величина параметра λ. В соответствии с (9), (12) случай $\lambda = 0$ определяет ситуацию с постоянной величиной субъективной полезности информации независимо от объема получаемого блага. Это косвенно свидетельствует о том, что получаемая информация при этом может оцениваться не в категории «полезности» блага, а в категории более редко встречающегося блага – «ценности»;

- значительная величина параметра μ. В нашей интерпретации это соответствует короткому времени воздействия источника полезной информации с большой амплитудой μ. То есть, несмотря на то, что вероятность как интегральная характеристика

$$\mathbf{P(t \to \infty)} = \mu \int_0^t \mathbf{e}^{-\mu x}\mathbf{dx} = \mathbf{1}, \qquad (24)$$

однако для распространения этого блага – информации важна не интегральная характеристика (вероятность), а дифференциальная (плотность распределения информации) и также ее амплитуда. Ускоряет процесс передачи ин-

формации импульс полезной информации с большой амплитудой воздействия (плотности вероятности). В данной модели это приближенно соответствует условии $P_2(N) = 1$ – максимально возможной информации, т.е. достоверно принимаемой как полезная информация с максимальной субъективной полезностью не зависящей от времени.

В соответствии с используемым приближением из (22) имеем:

$$\frac{dn}{dt} = n^2 \tag{25}$$

Интегрируя (25) с учетом $n(\tau = 0) = n(0)$, находим:

$$n(t) = \frac{n(0)}{1 - n(0) \times t} \tag{26}$$

Отсюда критическое время «взрыва» роста численности «приемников», воспринимающих информацию, находим приравнивая к нулю знаменатель (26):

$$t_{кр}^{(1)} = \frac{1}{n(0)} = \frac{N_0}{N(0)} \tag{27}$$

Если обратиться вновь к распределению Вейбулла, то анализируемая ситуация соответствует случаю, когда мы сдвигаем координату максимума $\sqrt{l/m}$ к нулю и выпрямляем правую часть кривой плотности распределения.

Рассмотрим второй предельный случай:

$$xn^2 << 1 \tag{28}$$

С учетом обозначений, он соответствует неравенству:

$$\frac{m}{2l} << 1 \tag{29}$$

Это неравенство можно интерпретировать следующим образом:

- малая величина μ, т.е. во времени информация не локализована и плотность распределения во времени имеет малую амплитуду и малый спад во времени;

- большая величина λ говорит о невысоком уровне полезности и приближению действия к убывающей предельной полезности.

Разлагая $\exp(-\xi n^2)$ в ряд и ограничиваясь двумя первыми членами, представим (22) в виде:

$$\frac{dn}{dt} = xn^4 \tag{30}$$

В этом уравнении вероятность $P_2 = \xi n^2$ является малой величиной. Таким образом, переход к (30) представляет переход к ситуации с малой субъективной полезностью для «приемника». В этой ситуации распределение плотности вероятности подчиняется линейному закону

$$f_2(n) = \frac{xn}{2} \tag{31}$$

Интегрируя (26) с учетом начального условия $n(\tau = 0) = n(0)$ для роста численности «приемников» в аудитории:

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{n(0)}}{\mathbf{1 - 3x n^3(0)} \times t} \qquad (32)$$

Соответственно приравнивая к нулю знаменатель в (32), находим критическое время роста численности «приемников»

$$t_{кр}^{(2)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3x n^3(0)}} = \frac{\mathbf{2 l N_0^3}}{\mathbf{3 m N^3(0)}} \qquad (33)$$

Из (33) и (27) находим соотношение критического времени в обоих случаях:

$$\frac{t_{кр}^{(2)}}{t_{кр}^{(1)}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3x n^2(0)}} >> \mathbf{1} \qquad (34)$$

Условие (34) вытекает из (28), т.е. оно выполняется при любом n, в том числе и при n = n(0).

Для более детального анализа было осуществлено численное моделирование путем численного решения дифференциального уравнения (22) в пакете Mathcad-14 с помощью метода Рунге-Кутта с переменным шагом с использованием встроенной функции Rkadapt.

На рис.2 приведена зависимость $\tau_{кр}$ для n(0) = 0,01, являющаяся интерполированным по точкам решением уравнения (27).

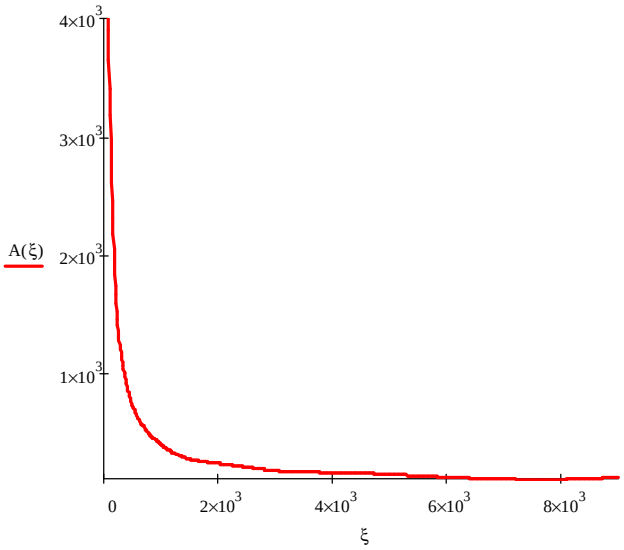

Рис.2 Зависимость $t_{кр}(x)$ для n(0) = 0,01.

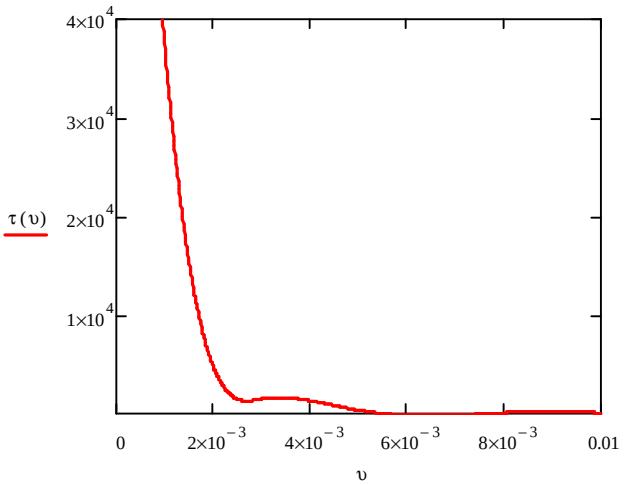

Рис.3 Зависимость критического времени τ(υ) от уровня начальной известности информации υ = n(0) при ξ = 9000.

На основе приведенного графика можно сказать, что приближение к ступенчатой форме распределения $P_2(n)$ при условии (23) достигается при $\xi \geq 10^4$ для $n(0) = 10^{-2}$. В данном случае $x \times \mathbf{n^2(0)} >> \mathbf{1}$.

Этот вывод подтверждается и графиком на рис.3. Можно сказать, что условие $x\mathbf{n(0)} \geq \mathbf{100}$ следует использовать как требование, позволяющее пренебречь экспоненциальным членом в (22). На графиках рис.2 и 3 начало отсчета по вертикальной оси смещено в точку $t = \mathbf{100}$

2. *Случай зависимости скорости роста полезности информации уже достигнутому уровню:*

$$\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} = l\mathbf{x}^{a} . \tag{35}$$

где α – показатель темпа роста.

Решение этого уравнения:

$$\mathbf{t}_{x} = \frac{\mathbf{1}}{l\mathbf{x}^{a}}; \mathbf{t(x)} = \frac{\mathbf{1}}{l}\frac{\mathbf{x}^{1-a}}{\mathbf{1} - a}(\textbf{при}_\mathbf{x(0)} = \mathbf{0}_\textbf{и}_a < \mathbf{1}) \tag{36}$$

и, соответственно, функция плотности вероятности

$$\mathbf{f(x)} = \frac{m}{l}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}^{a}} \times \mathbf{exp}\left(-\frac{m}{l} \times \frac{\mathbf{x}^{1-a}}{\mathbf{1} - a}\right) \tag{37}$$

Полагая $x = N/N_0$ с учетом (6) находим

$$\mathbf{f(N)} = \frac{m}{l}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N_0}}\left(\frac{\mathbf{N_0}}{\mathbf{N}}\right)^{a} \times \mathbf{exp}\left[-\frac{m}{l(\mathbf{1} - a)}\left(\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{N_0}}\right)^{a}\right] \tag{38}$$

Соответственно, субъективная вероятность

$$\mathbf{P_2(N)} = \mathbf{1} - \mathbf{exp}\left[-\frac{m}{l(\mathbf{1} - a)}\left(\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{N_0}}\right)^{1-a}\right] \tag{39}$$

С учетом этого, запишем уравнение роста численности воспринявших информацию как полезную аудитории «приемников»:

$$\frac{dn}{dt} = \left[1 - \exp\left(-\frac{2x}{1-e}n^{1-a}\right)\right]n^2, \qquad (40)$$

где $n = N/N_0$; $\tau = \gamma t$; $\xi = \mu/2\lambda$.

Условие пренебрежения экспоненциальными членами в правой части дифференциальных уравнений (22) и (39):

$$xn^2 >> 1 \text{ и } \frac{2x}{1-a}n^{1-a} >> 1 \qquad (41)$$

Оценим соотношение этих членов, учитывая $n \le 1$ и $\alpha < 1$ приходим к неравенству:

$$\frac{xn^2}{\frac{2x}{1-a}\times n^{1-a}} = \frac{1-a}{2}\times n^{1+a} < 1 \qquad (42)$$

Таким образом, можно считать, что в (39) экспоненциальный член быстрее становится пренебрежимо малым, чем в случае, описываемом уравнением (22). Это позволяет считать, что критическое время, в течение которого начинается взрывной рост аудитории «приемников», воспринявших полученную информацию как полезную, в этом случае меньше.

Численные расчеты для обоих дифференциальных уравнений подтверждают этот вывод. Так для случая $\xi = 100$, $n(0) = 0{,}01$, $\alpha = 0{,}1$ величина критического времени составила $\tau_{кр1} = 3386$ для случая убывающей скорости полезности информации и $\tau_{кр2} = 100$ для случая нарастающей скорости роста полезности информации. При этом во втором случае выполняется условие $\tau_{кр} = 1/n(0)$.

Более того, при уменьшении параметра $\xi = 10$ и сохранившихся остальных параметрах находим величину критического времени $\tau_{кр1} = 33386$ и $\tau_{кр2} = 208$.

На основании полученных результатов можно сделать важный вывод: случай увеличивающейся скорости роста субъективной полезности информации вызывает более быстрый рост численности «приемников» по сравнению со случаем убывающей скорости роста субъективной полезности информации. Это очень важный момент в субъективном восприятии полезности информации. Если на практике так реализовать поток передаваемых сообщений, то можно значительно ускорить необходимую реакцию «приемников» в случае, например, так называемого «вирусного» маркетинга в информационных сетях.

3. *Случай постоянной скорости роста полезности информации:*

$$\frac{dx}{dt} = l \qquad (43)$$

Из (43) находим $t = \frac{1}{l}x; t_x' = \frac{1}{l}$ при $x(0)=0$ и, соответственно,

$$f(x) = \frac{m}{l}\exp\left[-\frac{m}{l}x\right] \qquad (44)$$

С учетом (6), (7) из (44):

$$\mathbf{P_2(n) = \{1 - exp(-2xn)\}} \qquad (45)$$

И уравнение для роста численности аудитории «приемников»:

$$\frac{\mathbf{dn}}{\mathbf{d}t} = \mathbf{\{1 - exp(-2xn)\} \times n^2} \qquad (46)$$

Предельное решение которого при $\xi >> 1$ соответствует

$$\frac{\mathbf{dn}}{\mathbf{d}t} = \mathbf{n^2} \qquad (47)$$

т.е. аналогично рассмотренному выше. А в случае $\xi <<1$ и пренебрежения правой частью уравнения (46), получаем, что численность аудитории «приемников» остается неизменной.

Сопоставим показатель экспоненциального множителя с предыдущим случаем:

$$\frac{\mathbf{2xn}}{\frac{\mathbf{2x}}{\mathbf{1 -}\ a}\mathbf{n^{1-a}}} = \mathbf{(1 -}\ a\mathbf{) \times n^a < 1}\ , \qquad (48)$$

т.е. в предыдущем случае вклад экспоненциального множителя пренебрежимо малым становится гораздо раньше.

Численный расчет критического времени для значений параметров ξ = 100 и n(0) = 0,01 дает значение критчиеского времени $\tau_{кр3}$ = 306, что больше, чем в предыдущем случае: $\tau_{кр2}$ = 208.

Соотношение показателей экспонент с первым случаем в этой ситуации равно:

$$\frac{\mathbf{xn^2}}{\mathbf{2xn}} = \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}} < \mathbf{1} \qquad (49)$$

Т.е. рассматриваемый в этом параграфе случай является промежуточным по сравнению с предыдущим и соответствует $\alpha = 0$.

4. *Случай неизменной полезности*, т.е.

$$\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{0} \qquad (50)$$

В этом случае возникает вопрос о виде функции плотности вероятности, поскольку $\mathbf{x(t) = const; t_x^{¢} = ¥}$.

Эта ситуация может быть представлена не в вероятностных, а детерминированных параметрах процесса. Используем функцию плотности вероятности вида:

$$\mathbf{f(x) = a}d\mathbf{(x)}, \qquad (51)$$

где $\delta(x)$ – дельта функция Дирака. Соответственно

$$\mathbf{P_2(N) = a}\int_0^N d\mathbf{(x)dx = a} \text{ при } N > 0 \qquad (52)$$

В этом случае получаем исходное уравнение вида

$$\frac{\mathbf{dn}}{\mathbf{d}t} = \mathbf{an^2} \qquad (53)$$

При a = 0, т.е. $P_2 = 0$ информация субъективно оценивается как бесполезная и в дальнейшем представление о ее полезности не меняется. Численность аудитории «приемников» остается неизменной.

В случае a =1, т.е. $P_2 = 1$ и уравнение (53) соответствует максимальной субъективной полезности. Эта ситуация как предельный случай соответствует рассмотренной выше и соответствует априорной максимльной оценке полезности информации еще до ее получения «приемником».

Возможны промежуточные значения $0 < a < 1$, которые соотносятся с постоянным первоначальным уровнем полезности информации. Представление индивида об уровне полезности остается неизменным. Для реальной жизненной ситуация это скорее гипотетическая, поскольку представление о полезности информации во времени, конечно, изменяется.

В соответствии с приведенными оценками можно считать, что параметр ξ является инвариантом, определяющим эффективность распространения информации в выбранной аудитории в случаях различной оценки ее субъективной полезности.

С учетом введенных обозначений $x = \frac{2m}{l}$. При этом параметры μ и λ можно интерпретировать следующим образом:

Параметр $m = \frac{1}{Tсп}$, где $T_{сп}$ – эффективное время существования полезной информации или период спада функции плотности вероятности в (4) в е-раз.

Параметр $l = \frac{1}{Tп}$, где $T_п$ – характерное время изменения субъективной полезности информации.

В анализируемых моделях условия максимально эффективного распространения информации достигаются при условии $\xi >> 1$. При этом эффективное время изменения полезной информации должно быть значительно меньше характерного времени изменения субъективной полезности информации: $T_{сп} << T_п$.

Заключение

1. В работе разработана модель распространения информации в ограниченной аудитории с учетом как субъективной оценки полезности информации индивидом, так и динамики изменения потока информации во времени.

2. При этом рассмотрены следующие характерные зависимости изменения скорости роста полезности информации:

- убывает по гиперболическому закону от ее величины – аналог предельной полезности любого экономического блага;

- нарастает пропорционально величине полезности информации;
- постоянная во времени скорость роста полезности информации;
- постоянная во времени полезность информации.

3. Показано, что в рассматриваемой задаче параметр ξ является инвариантом, определяющим эффективность распространения информации.

4. При определенных условиях в аудитории возможен взрывной рост субъективной полезности после преодоления некоторого порога.

5. Основным условием взрывного роста полезности информации является требование $\xi >> 1$, что соответствует значительному превышению времени характерного изменения субъективной полезности $T_п$ по отношению к времени $T_{сп}$ спада собственно источника информации.

6. В общем случае минимальное критическое время нарастания численности «приемников», воспринимающих получаемую информацию как полезную, соответствует случаю скорости роста полезности пропорционально объему полученной информации.

Литература

1.Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи, методы, примеры. М.: Наука, 2001. – 301с..

2. Глущенко В.В. Прогнозирование.-2-е изд. - СПб: СП ГУВК, 1999.- 245с.