Минеев В.В.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ШЕПЛИ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ РАБОТЫ ПЕРСОНАЛА

В настоящее время такому предмету как математическое моделирование отводится приоритетное значение в большинстве основополагающих дисциплин и направлений экономического развития не только в высших учебных учреждениях, но и в компаниях, организациях, да и в каждом отдельном государстве в целом. В основу любого анализа, проводимого в рамках определенного субъекта экономической жизни, непосредственно входит и базируется именно на математическом моделировании и применение математических методов. Рассматриваются множество вариантов, и проводится большое количество исследований с целью внедрения и использования математических моделей для оптимизации хозяйственных процессов, для экономического анализа во всех возможных областях, для прогнозирования и предсказаний, в общем, идет активный процесс «заимствования» математических знаний в других областях, которые являются ведущими в 21 веке. Математическое моделирование является кладезю интересных и еще не исследованных идей. Одна из таких идей как раз рассмотрена в работе Минеева В.В., а именно применение теоремы Шепли и ее использование для организации работы персонала, причем, хочу отметить, что использовать математические методы, а в особенности упомянутую теорему можно как в рамках отдельного предприятия, так и рассматривать ее применение в более глобальных и масштабных проектах, например, коалиции, группы компании, можно перейти даже на отдельные государства и использовать теорему в рамках международных структур и организаций.

Теорема Шепли утверждает, что при определенных условиях персонал можно так организовать в бригады, что те будут согласны на предлагаемую им заработную плату и график работы.

Напомним следующее определение.

Набор коалиций Φ называется **сбалансированным**, если каждой коалиции S набора можно приписать неотрицательное число $a(S)$, (степень участия), так что $\sum_{S\in\Phi_i} a(S)=1$ для каждого $i\in G$.

Прежде чем сформулировать теорему Шепли необходимо ввести понятие симплекса.

Пусть a - положительная константа, рассмотрим множество

$\Delta(G)=\{X\in R^m : X\geq 0, x_1+\ldots+x_m=a\}$, это множество называется m-мерным симплексом. Здесь R^m - множество m-мерных векторов. Одномерный симплекс – это точка {a}, двумерный – отрезок на плоскости, соединяющий точки {0,a), (a,0) и т.д..

Любой коалиции $A\subseteq G$ сопоставим $|A|$-мерный симплекс

$\Delta(A)=\{X\in\Delta(G): x_i=0 \ \ \text{для} \ \ i\notin A\}$, являющийся гранью симплекса $\Delta(G)$.

Теорема Шепли. Пусть каждой коалиции $A\subseteq G$ сопоставлено такое замкнутое (возможно пустое) множество $F(A)\subseteq\Delta(G)$, что

$$\Delta(B)\subseteq\cup\{F(A): A\subseteq B\} \ \text{ для всякого } \ B\subseteq G. \qquad (2)$$

Тогда существует такой сбалансированный набор коалиций Φ, что $\cap\{F(A): A\in\Phi\}\neq\varnothing$.

(Шепли доказал свою теорему в 1953 г., доказательство теоремы см., например, в [1]).

Прокомментируем эту теорему. Предположим, что группа G планирует разделить денежную сумму a между своими членами. Тогда точки симплекса $\Delta(G)$ есть дележи этой суммы между членами группы (такое понимание дележа отличается от принятого в теории кооперативных групп -см. [1], но для понимания и использования теоремы Шепли это не существенно). Более того, симплекс $\Delta(A)$, соответствующий коалиции A есть множество дележей этой суммы a только между членами этой коалиции. Множество же $F(A)$ есть множество дележей, приемлемых (или желательных) для коалиции A (по определению! - если предложить какой-то дележ $X\in\Delta(G)$, то коалиция A примет его, если $X\in F(A)$ и отвергнет в противном случае). При такой интерпретации, условие (2) утверждает, что поскольку $\Delta(B)\subseteq\cup\{F(A): A\subseteq B\}$, то каждый дележ из $\Delta(B)$ является приемлемым для какой-то подкоалиции коалиции B. В частности, весь симплекс $\Delta(G)$ тоже заполнен дележами, приемлемыми для какого-то члена группы или какой-то коалиции. Теорема Шепли утверждает, что при выполнении указанного условия (2) найдется сбалансированный набор коалиций Φ , такой что $\cap\{F(A): A\in\Phi\}\neq\varnothing$. Пусть X - какой-то вектор из этого пересечения, тогда $X\in F(A)$ для любой коалиции A из этого набора. Таким образом, этот дележ приемлем для любой коалиции из набора Φ и может быть рекомендован для «мирного разрешения» проблемы дележа, ради чего и формировались коалиции.

Набор коалиций Φ для которого $\cap\{F(A): A\in\Phi\}\neq\varnothing$ назовем совместным – для коалиций этого набора существуют дележи, приемлемые для любой коалиции. Таким образом, теорема Шепли утверждает существование сбалансированного совместного набора коалиций при выполнении условия (2).

Если перевести этот абстрактный комментарий теоремы Шепли на содержательный язык, то получится вот что.

Пусть для выполнения некоторого проекта выделена сумма a и подобрана некоторая организация. При формировании рабочих бригад, которым поручается выполнение определенных работ в рамках этого проекта, эти бригады согласны выполнить работы по проекту, но предъявляют определенные требования к оплате труда своих членов. Иногда эти требования противоречат друг другу (что вполне естественно, все хотят заработать больше и трудиться в удобное для себя время!). Если любой дележ суммы a внутри бригады B оказывается приемлемым для части бригады (и она может выполнить работу по всему проекту!), то можно сформировать такие бригады и так распределить между ними части выполнения проекта, что найдется устраивающее все бригады распределение суммы a по все членам группы, при этом каждой бригаде будет указана часть проекта, которую та должна будет выполнить. Кроме того, каждый работник организации получит расписание своей работы, как член той или иной бригады, в целом он будет работать нормальное рабочее время.

Осталось заметить, что замкнутость множеств $F(A)$ вообще говоря ниоткуда не следует и просто-напросто предполагается.

Следующий пример взят из [4].

Пример 5. Пусть группа $G=\{1,2,3\}$, $a=1$. Теперь определим замкнутые множества $F(A)$ для всех возможных коалиций: $F(\{\varnothing\})=\varnothing, F(\{1\})=\{1,0,0\}, F(\{2\})=\{0,1,0\}, F(\{3\})=\{0,0,1\}$, для любой двучленной коалиции $\{i,j\}$ положим $F(\{i,j\})=\{X\in\Delta(G): x_i+x_j\geq 2/3\}$. Можно проверить выполнение условия (2). Сбалансированный набор существует, как и утверждает теорема. Вот он:[1/2{1,2},1/2{2,3},1/2{3,1}] - пересечение соответствующих множеств $F(\{1,2\}), F(\{2,3\}), F(\{3,1\})$ свелось к точке (1/3,1/3,1/3). Кстати, легко найти степени участия членов группы для найденного набора. Обозначим эти степени a_3, a_1, a_2 для коалиций, перечисленных выше в наборе, тогда нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} a_3+a_2=1, \\ a_2+a_3=1, \\ a_3+a_2=1. \end{cases}$$

Решение этой системы есть $a_1=a_2=a_3=1/2$. Это значит, что, например, 1-й член группы половину рабочего времени должен работать в коалиции (бригаде) $\{1,2\}$, а вторую половину – в коалиции (бригаде) $\{3,1\}$.

Отметим также содержательный смысл множеств $F(\{i,j\})$: например, $F(\{1,2\})=\{X\in\Delta(G): x_1+x_2\geq 2/3\}$, означает, что коалиция $\{1,2\}$ считает приемлемым для себя получить не менее 2/3 из всей единичной суммы.

Рассмотренный пример можно обобщить. Определим замкнутые множества $F(A)$ следующим образом: $F(A)=\{(X\in\Delta(G):(x_1+...+x_k\geq k/n\}$ для любой коалиции, состоящей из k членов (всего группа G насчитывает n членов). Нетрудно проверить выполнение условия (1). Итак, по теореме Шепли существует сбалансированный набор коалиций Φ. Что он собой представляет? Такой набор существует не один. Фиксируем какое-нибудь число $0<k<n$ и положим $\Phi_k=\{A\subset G: |A|=k\}$, т.е. Φ_k есть семейство всех k-членных коалиций. Степень участия членов группы в коалициях из этого на-

бора равна, конечно, $1/k$. Каждое семейство Φ_k, коалиции которого имеют степень участия $1/k$ представляет сбалансированный набор, даже минимальный сбалансированный набор. Как и в предыдущем примере пересечение множеств $F(A), A \in \Phi_k$ сводится к единственной точке $(1/k,...,1/k) \in \Delta(G)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Shapley L.S, Lloyd S. (1953). A value f или n-person games, Ann. Math. Studies 28, pages 307-318.