

S - ФАКТОР: ИСТОРИЯ И СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Управление счетами трейдеров отражено во множестве статей и книг. Актуальным является вопрос «механизма» нахождения оптимального пакета портфеля ценных бумаг или контрактов для получения наибольшего роста капитала. Основная идея данной статьи посвящена анализу видов предпринимательской деятельности с точки зрения быстроты роста капитала. В статье получены существенные результаты в этом направлении.

1. История вопроса. Концепция управления счетами трейдеров, доступная на популярном уровне, отражена во множестве статей и книг. Примером может служить книга [1], в которой осуществлена попытка в доступной для трейдеров форме описать механизм управления портфелем ценных бумаг. Для этого вводится некоторый количественный показатель f предполагаемого портфеля. Предлагается концепция, заключающаяся в том, что необходимо знать оптимальное торговое количество заключаемых контрактов. При этом количество, с которым следует работать сегодня, является функцией предыдущих результатов. По предположению автора, f - это регулятор роста капитала инвестора, а оптимальное f характеризует наибо́льший рост капитала инвестора. Трейдер не управляет ценами, но может регулировать уровень счета путем правильного выбора количества открываемых контрактов. Однако такая справедливая мотивация сопровождается лишь интуитивными ощущениями: «Поэтому ваши ресурсы будут использованы с большей отдачей, если сконцентрироваться на верном количестве. При любой сделке вы хотя бы приблизительно предполагаете, каким может быть убыток наихудшего случая. Можно даже не осознавать этого, но, когда вы начинаете торговлю, у вас есть ощущение, пусть даже подсознательное, что может произойти в худшем случае. Восприятие худшего случая вместе с уровнем баланса на вашем счете формирует решение о том, сколькими контрактами торговать». Вводится делитель (число между 0 и 1) наибольшего предполагаемого убытка для определения количества контрактов.

Такой делитель называется переменной f . Таким образом, сознательно или подсознательно при любой сделке вы выбираете значение f , когда решаете, сколько контрактов или акций приобрести. К сожалению, хорошая идея осталась в [1] на уровне введения показателя f .

В статье [3] получены существенные результаты в этом направлении, достигнута большая строгость в постановке задачи.

Рассмотрим какую-нибудь предпринимательскую деятельность. Вполне возможно что в начальный период прибыль и, значит, капитал бизнесмена будет расти какими-нибудь рваными скачками: за первый квартал бизнесмен получит 17% прибыли, за второй-3%, а в третий квартал вообще будет 5% убытка. Но, как правило, постепенно деятельность бизнесмена успокоится, как говорит-

ся, «все утрясется» и прибыль будет более-менее постоянной, скажем 2-3% в квартал. Наука уже давно выделила особый тип процессов¹, которые независимо от их начального состояния с течением времени входят в стационарный режим, который характеризуется тем, что характеристики такого процесса постоянны во времени. Такие процессы имеют ключевое свойство - их будущее развитие определяется только современным состоянием, а история развития в прошлом на будущее не влияет.

1. Общая постановка задачи. Пусть эта деятельность бизнесмена уже вошла в стационарный режим и за некоторый временной период дает какой-то случайный (с.) доход x . Это - текущий доход, основную стоимость бизнеса будем считать постоянной. Пусть участник рынка имеет капитал K . Предположим, он желает в начале каждого указанного временного периода вкладывать в рассматриваемый бизнес какую-то денежную сумму - на расширение производства, на увеличение персонала, на улучшение его качественного состава. Эта сумма измеряется в каких-то условных единицах, скажем m , так что величина (в.) m/K остается постоянной от периода к периоду, хотя обе величины m, K могут меняться (аналогом может служить сумма, выделяемая на амортизацию, а в конечном счете на замену выбытия фондов - в этом случае ежегодно выделяется примерно 1/10 всей стоимости фондов). В принципе, это удобно. Обозначим отношение m/K через s , так что $m = sK$. Если вложения неудачны, то они могут даже принести и убыток, так что слишком большие вложения могут даже привести к разорению - имеющегося капитала K может не хватить для оплаты убытков; в то же время при малых вложениях капитал будет расти медленно; так что в выборе m или, что в сущности одно и то же, s нужна осмотрительность.

Приращение капитала за период есть $\Delta K = mx = sKx$, так что в конце периода - начале следующего капитал будет равен $K + \Delta K = K(1 + sx)$.

Следовательно, в конце 1-го периода капитал будет $K_1 = K(1 + sx_1)$, в конце

2-го будет $K(1 + sx_1)(1 + sx_2)$, в конце n -го периода капитал будет равен $K_n = K(1 + sx_1) \dots (1 + sx_n)$, где K - капитал в начале 1-го периода, а $x_1, \dots, x_n$ - значения текущих доходов рассматриваемого бизнеса за соответствующие периоды.

Отношение K_n / K есть скорость роста за все n периодов, а $\sqrt[n]{K_n / K}$ естественно назвать скоростью роста в среднем за период или просто средней скоростью роста. Спрашивается, каким должно быть s , чтобы эта средняя скорость была максимальной? В тоже время нужно избежать разорения.

В [1] Р.Винс изучал величину $f = K/m$, названную им f -фактором -ее содержательный смысл: какова величина капитала, приходящаяся на одну условную единицу вложений. Указанную величину уместно назвать величиной

¹ Они называются марковскими в честь открывшего их русского математика Маркова.

покрытия капитала. Ясно, что $s = 1/f$. Величина s , возможно, проигрывает в содержательном смысле величине f , но это искупается простотой и красотой полученных выводов и формул.

Вернемся к определению s , максимизирующей среднюю скорость роста капитала. Для конкретности, иногда о бизнесе будем говорить как об операциях с ценными бумагами-покупка и продажа их). Имеем $\ln K_n = \ln K + \dots \ln(1 + sx_n)$. Будем считать, что с.в. $x_1, \dots, x_n$ одинаково распределены (как с.в. x) и независимы в совокупности (хотя достаточно было бы лишь их некоррелированности),

$$W_n = \sum_{i=1}^n \ln(1 + sx_i)$$

тогда с.в. имеет математическое ожидание $a_n = na$, где $a = M[\ln(1 + sx)]$ и дисперсию $d_n = nd$, где $d = D[\ln(1 + sx)]$.

Теперь имеем $\ln(K_n/K) = W_n$ или $K_n/K = e^{W_n}$. Средняя скорость роста $\sqrt[n]{K_n/K} = e^{W_n/n}$. Рассмотрим с.в. $G(s) = W_n/n$. Из вышеуказанного следует, что $G(s)$ имеет математическое ожидание a и дисперсию $d/\sqrt{n}$ - см. выше. Поэтому при больших n это будет приближенно постоянная величина a . Из всего этого вытекает, что для исследования максимизации средней скорости роста равной $e^{G(s)}$ можно ограничиться исследованием с.в. $G(s)$, последнее же можно заменить исследованием максимизации математического ожидания этой с.в. Имеем $M[G(s)] = M[W_n/n] = M[\ln(1 + sx)]$. Обозначим $M[\ln(1 + sx)]$ через $j(s)$ и эту функцию исследуем на максимум, обозначая точку максимума через s^* . По смыслу, область определения функции j есть $[0, \infty)$.

2. Стратегия управления капиталом с постоянным s . Можно рассматривать разные стратегии управления капиталом в рассматриваемой ситуации, например, рассмотрим стратегию постоянного s . При такой стратегии для рассматриваемой ценной бумаги - ее с. дохода x находится величина $s^* = s^*(x)$ и в каждом цикле покупается $m = s^* K$ экземпляров этой бумаги (напомним, что и K и, значит, m меняются от цикла к циклу).

Условие максимума для дискретного случая, т.е. когда случайная величина доходов x является дискретной:

$$j'(s) = 0, \quad \sum_i a_i p_i / (1 + a_i s) = 0 \quad (1)$$

Пусть возможные значения x есть различные a_i с вероятностями p_i .

$$j(s) = \sum_i p_i \ln(1 + sa_i) \quad j'(s) = \sum_i a_i p_i / (1 + sa_i)$$

Имеем: , далее ; для кратко-

сти, обозначим последнюю функцию $f(s)$; далее,

$$j''(s) = f'(s) = -\sum_i a_i^2 p_i / (1 + sa_i)^2 \quad f(0) = j'(0) = \sum_i a_i p_i = M[x]$$

Отметим, что

Пусть отрицательных возможных значений x нет, тогда разорения бояться не-

чего, кроме того $M[x] \geq 0$, значит, каждое произведение $a_i p_i \geq 0$, тем самым, все $a_i \geq 0$, значит, существует хотя бы одно строго положительное (ибо по предположению они все различные). Тогда $j''(s) = f'(s) < 0$. Но раз производная f' отрицательна, значит нуль функции f единственен. Кроме того, он находится где-то на интервале $[0, t)$. Обозначим этот нуль $O(f)$.

Предположим, что доход за период есть случайная величина X (для этого должны быть выполнены некоторые предположения, они в основном касаются статистической стабильности рассматриваемого бизнеса). Но закон распределения этой случайной величины нам неизвестен, мы можем лишь взять некоторую выборку цен и дивидендов, например, на данную акцию, то есть некоторую выборку текущих доходов, которую обозначим R , пусть k -объем этой выборки.

Способ найти s -фактор.

Чтобы найти s -фактор, надо найти нуль производной j' или, что то же самое, нуль функции f -тот, что обозначен $O(f)$. Рассмотрим функцию

$V(R, s) = (\sum_{i=1}^k (1/k) \ln(1 + sr_i))$ - выборочный аналог функции j , обозначим эту функцию для краткости $V(s)$, ее производную F , нуль производной этой функции $O(F)$. Этот нуль существует и единственен, потому что 2-я производная функции $V(R, s)$ (или производная функции F : $F'(s) = -\sum (1/k) r_i^2 / (1 + sr_i) < 0$

. (аргументы такие же, как и для функции j и ее производных). Так как нуль функции F является статистикой, то встает вопрос о ее состоятельности, несмещенности, как оценки нуля $O(f)$ функции f и т.п. статистических характеристиках.

Предложение 1. $O(R)$ является состоятельной оценкой нуля $O(f)$ (т.е. s -фактора).

Доказательство изложено в нашей заметке [4], поэтому здесь оно не приводится.

Пример 1. Пусть X есть д.с.в., принимающая значения $2, -1$ с равной вероятностью.

Условие максимума (1)
 $f'(s) \sum a_i p_i / (1 + sa_i) = 0 \Rightarrow 2 \cdot (1/2) / (1 + 2s) - 1 \cdot (1/2) / (1 - s) = 0$
 есть , откуда полу-

чаем $s^* = 1/4$. Итак, если капитал участника равен 400 денежным единицам, то он приобретет 100 экземпляров рассматриваемой ценной бумаги (если у него хватит этой суммы, чтобы их купить - но это предполагается!). Но это только в начале 1-го периода. Кроме ценных бумаг рассмотрим игру в рулетку или лотерею с безгранично делимой ставкой. Кратко повторим постановку задачи в

этом случае. Участие в игре бесплатное. При ставке 1 выигрыш есть с.в.^x. Можно сразу поставить ставку s , тогда выигрыш будет s^x . (Формулы Келли – см. о них в [1]). Рассмотрим игру, в которой выигрыш a с вероятностью p и проигрыш a с дополнительной вероятностью. Чему здесь должно быть равно s^* ? Условие максимума (1) дает $s^* = (2p - 1)/a$. Это так называемая первая формула Келли.

Далее рассмотрим игру, в которой выигрыш b с вероятностью p и проигрыш a с дополнительной вероятностью. Чему здесь должно быть равно s^* ? Условие максимума (1) дает $s^* = (bp - a(1 - p))/(ab)$. Это так называемая вторая формула Келли.

Пример 2.^x есть н.с.в., равномерно распределенная на промежутке $[-1, 2]$. Условие максимума есть $\int_{-1}^2 x dx / (3(1 + sx)) = 0$. Выкладки приводят к трансцендентному уравнению $(1 + 2s)(1 - s) = e^{3s}$. На промежутке $[0, 1]$ это уравнение имеет одно решение, приблизительно $s^* = 0,72$.

Возвратимся к основной идее данной заметки – анализу видов предпринимательской деятельности с точки зрения быстроты роста капитала. Для каждого вида найдем S -фактор и скорость V роста капитала, после чего осталось выбрать предпринимательскую деятельность с наибольшей скоростью роста капитала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Винс Р., Математика управления капиталом, Пер. с англ., М., Альпина Паблишер, 2001
2. Винс Р., Математика управления капиталом, Пер. с англ., М., Альпина Паблишер, 2011
3. Малыхин В.И. Модель роста капитала с гарантией неразорения // Экономика и математические методы, 2004, том 40, №4. С.134-136]
4. Тимофеев И. А. Математика S -фактора.- Вестник университета ГУУ